USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PARA A SIMULAÇÃO DAS CURVAS DE RESFRIAMENTO DA ÁGUA E DA GLICERINA

Eduarda Cristina Brancher GARLET[1], Lais Akemi DAVELLI[1], Víctor Eduardo Lara BORTOLI[1], Maiquiel Schmidt de OLIVEIRA[2], Camila Nicola Boeri Di DOMENICO[2], Ronaldo Folmann SANTOS[3].

[1]Acadêmicos do Curso de Engenharia Química
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *Campus* Francisco Beltrão
Francisco Beltrão – Paraná - Brasil

[2] Departamento Acadêmico de Física, Estatística e Matemática - DAFEM
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *Campus* Francisco Beltrão
Francisco Beltrão – Paraná – Brasil

[3] Coordenação de Estação Experimental - COEXP
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *Campus* Francisco Beltrão
Francisco Beltrão – Paraná - Brasil

E-mails: eduardagarlet@alunos.utfpr.edu.br, laisakemi@alunos.utfpr.edu.br, victorbortoli@alunos.utfpr.edu.br, msoliveira@utfpr.edu.br, camiladomenico@professores.utfpr.edu.br, coexp-fb@utfpr.edu.br.

Resumo: *A Lei de Resfriamento de Newton demonstra que a variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente em que está inserido. Nesse sentido, é possível aplicar Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de Primeira Ordem para solucionar problemas que envolvam a Lei. As substâncias escolhidas para o estudo foram a água e a glicerina, posto que a água é uma substância pura e a glicerina possui grande versatilidade na indústria. Assim sendo, o objetivo do presente trabalho foi realizar experimentos e modelar as curvas de resfriamento da água e da glicerina, a fim de verificar a veracidade e aplicabilidade da Lei de resfriamento. Para tanto, efetuou-se o resfriamento das duas substâncias em laboratório. Então, os valores foram tabulados e utilizados para encontrar a EDO que descreve cada um dos fenômenos, para posteriormente efetuar a comparação entre os dados experimentais e os modelados. O erro médio obtido para a água foi de 3,88%, já o da glicerina foi igual a 3,64%. Os coeficientes de correlação obtidos foram de 0,99448 para a água, e 0,99958 para a glicerina, indicando consistência entre a modelagem e os dados experimentais. A partir dos resultados obtidos, conclui-se que a Lei de Resfriamento de Newton é universalizada, dado que tanto a modelagem da água, quanto a da glicerina, respeitaram a curva obtida experimentalmente.*

Palavras-chave: *Lei de Resfriamento de Newton; Modelagem matemática; Água; Glicerina.*

INTRODUÇÃO

Desde a sua criação, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) têm desempenhado papel fundamental no avanço do entendimento de uma variedade de fenômenos cotidianos, que podem ser descritos por meio de diferentes modelos matemáticos, como a Lei de Resfriamento de Newton.

Bassanezi e Ferreira Júnior (1988) citam que a Lei de resfriamento de Newton estabelece que a variação da temperatura de um corpo ou substância é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente. Através dessa lei, como menciona Coelho (2014), é possível descobrir a temperatura da substância em um determinado intervalo de tempo ou quanto tempo demora para a matéria atingir a temperatura de interesse.

Além disso, é importante mencionar que, conforme a Lei, se um corpo de temperatura inicial (TC) definida é inserido em um ambiente com temperatura constante (TM), TC tenderá ao valor de TM. Portanto, caso a temperatura do corpo seja maior que a do ambiente, o corpo estará em processo de resfriamento, caso contrário, se sua temperatura for menor que a do ambiente, o corpo aquecerá (RODRIGUES, 2019).

Ter conhecimento da curva de resfriamento de uma substância é fundamental, pois através dela é possível calcular seu calor específico, definido por Halliday *et al*. (2013) como a capacidade térmica por unidade de massa do material de que o objeto é feito.

A água (H_2O), foi escolhida em função de ser uma substância pura, de fácil obtenção e que sofre pouca interferência externa e interna, durante o resfriamento (RODRIGUES, 2019). Já a glicerina ($C_3H_8O_3$) é um composto orgânico amplamente utilizado nas indústrias e possui diversas aplicações, tal como a fabricação de cápsulas na indústria farmacêutica (ALVARO, 2022). Com isso, foram comparados os resultados obtidos experimentalmente, através do resfriamento da água e da glicerina em laboratório, com os cálculos realizados pela Lei de resfriamento de Newton e com resultados de outros trabalhos (para o caso da água), a fim de comprovar a universalidade dessa Lei, uma vez que pode ser aplicada a diversas substâncias.

Nesse sentido, esse estudo visa realizar a modelagem matemática, através de EDOs, das curvas de resfriamento da água e da glicerina.

Alguns estudos já foram realizados utilizando os conceitos de resfriamento de Newton (EDO), tais como: resfriamento do café (Teixera *et al*., 2017), modelagem matemática da conservação de temperaturas de líquidos em uma garrafa térmica com ampola de vidro (Matos *et al*., 2017), processo de aquecimento da água (Romano *et al*., 2017) e mode-lagem matemática da Lei de resfriamento de Newton da água (Andreis *et al*., 2020). Não foram encontrados estudos associados à modelagem do resfriamento da glicerina.

METODOLOGIA

Parte experimental

Para a realização dos experimentos, os materiais utilizados foram: duas chapas de aquecimento, dois béqueres de 250 mL, glicerina, água destilada, dois termômetros e uma chapa de madeira. A chapa de madeira foi utilizada para auxiliar no controle da temperatura ambiente durante o resfriamento, ou seja, para o meio não influenciar na temperatura ambiente. A prática foi conduzida no laboratório de Físico-química da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Francisco Beltrão, sendo o experimento realizado em triplicata.

Figura 1 – Materiais utilizados

Fonte: Autoria própria (2023)

Inicialmente, foi aferida a temperatura do ambiente, que estava em 24 ºC. Em seguida, adicionaram-se 200 mL de água destilada em um béquer, posicionando-o na chapa de aquecimento, acompanhado de o termômetro para aferição da temperatura do sistema, o mesmo processo foi feito para a glicerina, em outra chapa de aquecimento. Posteriormente, a água foi aquecida até atingir 94 ºC e a glicerina até 75 ºC, simultaneamente. Então, os

sistemas foram deixados em repouso até atingir a temperatura ambiente, sobre uma chapa de madeira.

A temperatura de ambos os sistemas foi registrada a cada 15 minutos, e os valores foram dispostos em uma planilha no Microsoft Excel®, para posterior análise.

Modelagem matemática

Compararam-se os resultados obtidos experimentalmente, através do resfriamento da água e da glicerina em laboratório, com os cálculos realizados pela Lei de resfriamento de Newton e com resultados de outros trabalhos (para o caso da água), a fim de comprovar a utilidade dessa Lei, uma vez que pode ser aplicada a diversas substâncias.

A modelagem dos dados foi realizada utilizando EDOs de primeira ordem, mais especificamente pela Lei de resfriamento de Newton, apresentada pela Equação 1:

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - Tm) \text{ sujeito a } T_{(0)} = T_0 \qquad (1)$$

Onde: $\frac{dT}{dt}$ é a variação da temperatura em relação ao tempo, k é a constante de proporcionalidade e T-Tm é a diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente. Ainda, é possível observar que, para a variação de temperatura no resfriamento, o valor da constante k é negativo.

Essa equação diferencial pode ser solucionada pelo método de equações separáveis, resultando na Equação 2:

$$T_{(t)} = ce^{-kt} + Tm \qquad (2)$$

Ao aplicar a condição inicial $T_{(0)} = T_0$, é gerada a solução apresentada na Equação 3:

$$T_{(t)} = (T_0 - T_m)\,e^{kt} + T_m \qquad (3)$$

Para posterior comparação entre os dados obtidos pela modelagem e pelo experimento, calculou-se o erro relativo, em porcentagem, seguindo a Equação 4:

$$E_r = \frac{|Modelagem - Experimental|}{Modelagem} \times 100 \qquad (4)$$

Com a finalidade de verificar a adequação da modelagem, além do erro relativo médio, calcularam-se os coeficientes de correlação obtidos, através da fórmula descrita por Montgomery *et al*. (2015) e expressa na Equação 5:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_j)}{(\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2})(\sqrt{n\sum_{j=1}^{n} y_j{}^2 - (\sum_{j=1}^{n} y_j)^2})} \quad (5)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para ambos os experimentos, encontrou-se o valor da constante *k* substituindo os valores experimentais na solução particular. Inicialmente, foi calculado um valor de *k* para cada intervalo de tempo (15-30, 15-45, 15-60 minutos,…). Em seguida, calculou-se uma média aritmética entre os valores de *k* e o valor médio foi aplicado.

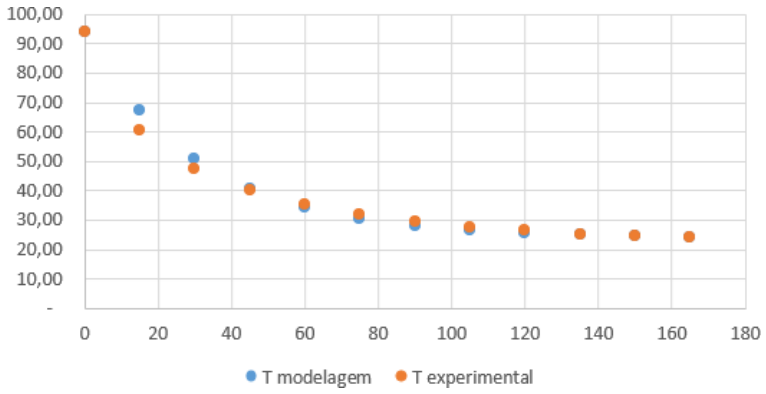
Dessa forma, para o cálculo da modelagem da água, considerou-se *k* = -0,0317, T_0 = 94ºC, T_m = 24ºC e $T_{(t)}$ = 60,67ºC. Os valores experimentais e os obtidos com a modelagem matemática estão contidos na Tabela 1, e o gráfico associado a eles está na Figura 2.

Tabela 1 – Valores experimentais e modelados para a água

Tempo	T experimental	T modelagem
0	94,00	94,00
15	60,67	67,53
30	47,33	51,07
45	40,00	40,83
60	35,50	34,47
75	32,00	30,51
90	29,67	28,05
105	27,83	26,52
120	26,67	25,57
135	25,33	24,97
150	24,50	24,61
165	24,00	24,38

Fonte: Autoria própria (2023)

Figura 2 – Gráfico para o resfriamento da água



Fonte: Autoria própria (2023)

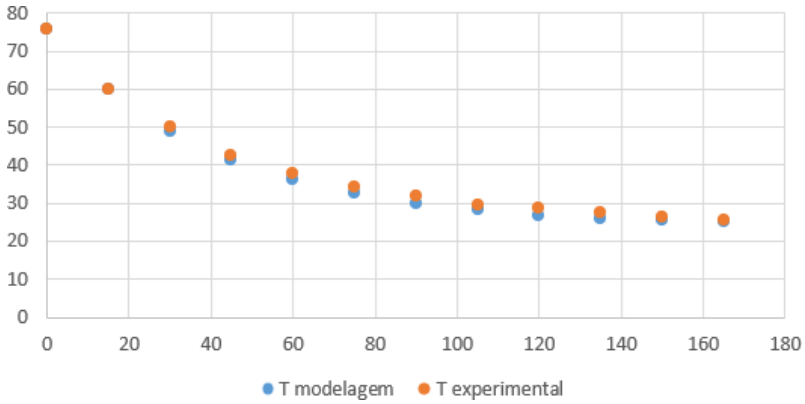
Os cálculos para a glicerina foram efetuados da mesma forma que o da água. Sendo assim, para essa substância considerou-se a média dos *k* igual a -0,0213, T_0 = 75,67ºC, T_m = 24ºC e $T_{(t)}$ = 60ºC. Na Tabela 2 estão os valores obtidos experimentalmente e os obtidos através da modelagem. A partir dela, construiu-se o gráfico da Figura 3.

Tabela 2 - Valores experimentais e modelados para glicerina

Tempo	T experimental	T modelagem
0	75,67	75,67
15	60	36,18
30	50,17	39,43
45	42,67	42,48
60	37,67	44,85
75	34,17	46,68
90	32	47,90
105	29,67	49,28
120	28,67	49,90
135	27,5	50,64
150	26,33	51,40
165	25,67	51,84

Fonte: Autoria própria (2023)

Figura 3 – Gráfico para o resfriamento da glicerina



Fonte: Autoria própria (2023)

No caso do cálculo da modelagem para a água, foi obtido um erro médio de 3,88%. Já para a glicerina, foi obtido um erro médio de 3,64%. Ambos os valores são menores do que a média dos valores encontrados por Furtado (2022), que obteve erro relativo de, em média, 4,9% para o resfriamento da água.

Os coeficientes de correlação obtidos foram de 0,99448 para a água e 0,99958 para a glicerina. Nesse sentido, Costa Neto (2002) pontua que o valor do coeficiente de correlação varia entre -1 e 1, sendo que quanto mais próximo o valor estiver das extremidades, maior a correlação existente entre os dados analisados. Assim, a partir dos valores obtidos pelas simulações, pode-se afirmar que o ajuste foi satisfatório.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados obtidos, conclui-se que a Lei de resfriamento de Newton foi adequada para realizar a modelagem matemática, tanto da água quanto da glicerina, visto que os resultados simulados pela EDO ajustaram-se aos dados experimentais de forma satisfatória. Além disso, uma vez aquecidas, ambas as substâncias tendem a atingir a temperatura ambiente, o que condiz com o princípio da lei.

É possível citar como uma das limitações do trabalho o fato de que o sistema não foi isolado termicamente, sendo assim, esteve suscetível à interferência de fatores externos

(pequenas variações de temperatura do meio ambiente), o que pode ter impactado no erro relativo médio.

Sugestões para trabalhos futuros incluem a busca por justificativas técnicas para comparação entre as substâncias utilizadas, uma vez que ambas levaram tempos diferentes para igualarem-se à temperatura ambiente. Além disso, poderiam ser testadas outras mode - lagens matemáticas, que considerassem a variação da temperatura ambiente. Também, se - ria possível aumentar ou diminuir os intervalos de tempo entre as medições, para analisar o comportamento das curvas.

REFERÊNCIAS

ALVARO, Julie. *Glicerina: o que é, para que serve, propriedades*. 2023. Disponível em: https://www.quimica.com.br/glicerina-o-que-e-para-que-serve-propriedades/. Acesso em: 21 maio 2023.

ANDREIS, Greice da Silva Lorenzzetti; LORENÇO, Franciele. MODELAGEM MATEMÁTICA DA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON APLICADA NO ENSINO MÉDIO. *Cadernos de Educação Básica*, [S.L.], v. 4, n. 2, p. 132, 22 abr. 2020. Imperial Editora. http://dx.doi.org/10.33025/ceb.v4i2.2763. Disponível em: https://portalespiral.cp2.g12.br/index.php/cadernos/article/view/2763. Acesso em: 15 jun. 2023.

BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA JUNIOR, Wilson Castro. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988. 585 p. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Rodney-Bassanezi/publication/258030060_Equacoes_Diferenciais_com_Aplicacoes/links/0c960526a84babd222000000/Equacoes-Diferenciais-com-Aplicacoes.pdf. Acesso em: 28 abr. 2023.

COELHO, Pedro. *Lei de Newton para aquecimento e resfriamento*. engquimicasantossp, 15 dez. 2014. Disponível em: https://www.engquimicasantossp.com.br/2014/12/lei- de-newton-para-aquecimento-e.html. Acesso em: 01 maio 2023.

COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira. *Estatística*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2002. 281 p.

FURTADO, Thiago Rodrigues. *Modelo de resfriamento de Newton: Uma aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem*. 2022. 44 f. TCC (Doutorado) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2022. Disponível em: http://repositorio.uft.edu.br/bitstream/11612/4649/1/TCC%20-%20Monografia%20Matem%c3%a1tica%20-%20Thiago.pdf. Acesso em: 15 jun. 2022.

HALLIDAY, David *et al*. *Fundamentos de física*: gravitação, ondas e termodinâmica. 9. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2013. 296 p.

MATOS, Dionatan Breskovit de *et al*. Modelagem matemática da conservação de temperaturas de líquidos em uma garrafa térmica com ampola de vidro: uma aplicação da lei de resfriamento de Newton. In: IV CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA, 4., 2017, Santo Ângelo. *Anais [...]*. Santo Ângelo: [S.I], 2017. Disponível em: https://san.uri.br/sites/anais/ciecitec/2017/resumos/comunicacao/trabalho_2826.pdf. Aces- so em: 15 jun. 2023.

MONTGOMERY, Douglas *et al*. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. Rio de Janeiro: Ltc, 2015. 521 p.

RODRIGUES, Wesley Muniz Domingos. Lei do resfriamento de Newton: modelagem matemática e ensino-aprendizagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. *Comunicações Científicas*. Londrina: [S.I], 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1262/803. Acesso em: 01 maio 2023.

ROMANO, Rafael *et al*. Processo de aquecimento da água: estudo experimental e simulação matemática por meio de equação diferencial ordinária. In: WORKSHOP DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO, 4., 2017, Francisco Beltrão. *Anais [...]*. Francisco Beltrão: [S.I], 2017. p. 346-348. Disponível em: https://wcti.fb.utfpr.edu.br/anais/anaiswcti2017.pdf. Acesso em: 13 jun. 2023.

TEIXERA, Karla *et al*. Resfriamento do café: estudo experimental e simulação matemática através de equação diferencial ordinária. In: WORKSHOP DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO, 4., 2017, Francisco Beltrão. *Anais [...]*. Francisco Beltrão: [S.I], 2017. p.73-76. Disponível em: https://wcti.fb.utfpr.edu.br/anais/anaiswcti2017.pdf. Acesso em: 13 jun. 2023.

ZILL, Dennis G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. 3. ed., v. 10, São Paulo: Cengage Learning, 2016.